

KESTABILAN MODEL POPULASI SATU MANGSA-DUA PEMANGSA DENGAN PEMANENAN OPTIMAL PADA PEMANGSA

Muhammad Ikbal¹⁾, Syamsuddin Toaha²⁾, Kasbawati³⁾

¹⁾²⁾³⁾ Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Hasanuddin

Jln. Perintis Kemerdekaan, KM 10, Makassar

¹⁾muhammadikbal888@gmail.com

²⁾syamsuddint@yahoo.com

³⁾kasbawati@gmail.com

Abstract— Tulisan ini mengkaji suatu model pertumbuhan dua populasi pemangsa saling berkompetisi secara langsung mendapatkan satu populasi mangsa yang sama. Fungsi predasi dari dua pemangsa diasumsikan sama yaitu mengikuti fungsi predasi Holling tipe I. Dengan asumsi bahwa kedua populasi pemangsa bernilai ekonomi, maka fungsi pemanenan dilibatkan dalam model. Fungsi pemanenan yang dikenakan adalah proporsional dengan ukuran populasi pemangsa. Pada model tersebut dilakukan analisis tentang syarat kewujudan dan kestabilan titik keseimbangan interior. Analisis kestabilan titik keseimbangan interior dilakukan dengan metode linearisasi dan dengan memperhatikan nilai eigen dari matriks Jacobi yang diperoleh. Analisis kestabilan titik keseimbangan dilakukan sebelum dan sesudah diberikan pemanenan. Terdapat delapan titik keseimbangan yang diperoleh pada model tanpa maupun dengan pemanenan. Ada enam titik keseimbangan yang dapat diinterpretasikan. Keenam titik tersebut stabil lokal. Untuk titik keseimbangan interior yang stabil dihubungkan dengan analisis keuntungan, dan diperoleh nilai usaha pemanenan yang memberikan keuntungan maksimal. Berdasarkan hasil analisis diperoleh nilai usaha pemanenan tertentu yang memberikan titik keseimbangan yang stabil dan keuntungan yang maksimal untuk waktu yang panjang.

Kata Kunci— Model mangsa pemangsa, Titik keseimbangan, Kompetisi, Kestabilan lokal, Pemanenan optimal

I. PENDAHULUAN

Ada banyak peneliti yang memodelkan interaksi populasi mangsa dan pemangsa. Alebraheem dan Abu Hasan (2012) meneliti tentang ketahanan pemangsa dalam sistem model mangsa-pemangsa dengan solusi non-periodik. Das

(2011) membahas tentang dinamika model mangsa-pemangsa dengan pemangsa yang berpenyakit. Farajzadeh dkk., (2012) membahas tentang kestabilan model Gauss untuk satu populasi mangsa dua populasi pemangsa. Gakkhar, dkk., (2007) meneliti tentang kompetisi dua pemangsa terhadap satu mangsa. Gupta dan Chandra (2017) membahas tentang dinamika model mangsa-pemangsa dengan pemanenan kuadratik. Penelitian dari Kar dan Matsuda (2007) membahas tentang dinamika global dan kontrol dari model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe III. Kar (2010) meneliti tentang model reaksi dinamika sistem mangsa-pemangsa. Mukhopadhyay dan Bhattacharyya (2015), mengkaji tentang pengaruh pemanenan dan kompetisi antara pemangsa dalam model mangsa-pemangsa. Ndam dkk., (2012) membahas tentang suatu model interaksi tiga spesies dalam satu habitat. Toaha dkk., (2014) membahas tentang analisis kestabilan dan kebijakan pemanenan dengan usaha konstan. Upadhyay dan Raw (2011) membahas tentang dinamika kompleks dari model rantai makanan tiga spesies dengan fungsi respon Holling tipe III.

Pada artikel ini dibahas dinamika populasi satu mangsa dengan dua populasi pemangsa. Dengan asumsi bahwa populasi pemangsa bernilai ekonomi, maka kedua populasi dipanen dengan usaha pemanenan konstan. Kewujudan dan kestabilan titik keseimbangan interior dianalisis. Selanjutnya titik keseimbangan interior yang stabil dihubungkan dengan persoalan keuntungan optimal.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Mukhopadhyay dan Bhattacharyya (2015) telah mengkaji dinamika populasi satu mangsa dan dua pemangsa dalam bentuk sistem persamaan diferensial. Dinamika dua pemangsa (H_1 dan H_2) dan satu mangsa P diberikan sebagai

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - \alpha_1 P H_1 - \frac{e_2 \alpha_2 P H_2}{h + P} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\frac{dH_1}{dt} &= e_1\alpha_1PH_1 - \beta_1H_1H_2 - d_1H_1 \\ \frac{dH_2}{dt} &= \frac{e_2\alpha_2PH_2}{h+P} - \beta_2H_1H_2 - d_2H_2 - q_2E_2H_2,\end{aligned}$$

dengan nilai awal

$$P(0) > 0; H_1(0) \geq 0; H_2(0) \geq 0.$$

Kedua spesies pemangsa tersebut diasumsikan mempunyai berinteraksi langsung dengan mangsa. Kedua populasi pemangsa memberi pengaruh yang sama kuat terhadap mangsa dan mereka berkompetisi. Pengaruh interaksi kedua pemangsa diasumsikan proporsional terhadap kepadatan populasi pemangsa dengan β_1 dan β_2 masing-masing koefisien interaksi yang diberikan. Akan tetapi, fungsi predasi dari dua pemangsa dibuat berbeda, satu mengikuti respon Holling tipe I dan yang lainnya mengikuti respon Holling tipe II. Di samping mengalami pengurangan karena adanya fungsi predasi, populasi mangsa tumbuh logistik dengan r sebagai angka pertumbuhan intrinsik dan K sebagai kapasitas bawaan. Diasumsikan juga bahwa pemangsa H_2 dapat dipanen. Konstanta E dan q masing-masing menyatakan usaha pemanenan dan koefisien ketertangkapan.

III. METODE PENELITIAN

A. Tahap Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan mencari referensi yang menunjang penelitian. Pemahaman mengenai masalah kestabilan sangat membantu dalam penyelesaian model tersebut.

B. Tahap Analisis Model

Pada tahap ini model dianalisis dengan cara mencari titik keseimbangan kemudian diperiksa kestabilannya. Karena persamaan model merupakan persamaan diferensial tak linear maka model perlu dilinearisasikan terlebih dahulu dengan memanfaatkan matriks Jacobian, selanjutnya dianalisis kestabilannya dengan melihat nilai eigen atau menggunakan uji kestabilan Routh-Hurwitz. Setelah itu menganalisis pemanenan optimal.

C. Tahap Simulasi Model

Pada tahap ini simulasi dilakukan untuk melihat perilaku dari trayektori dari system di sekitar titik keseimbangan dan fungsi keuntungan.

D. Tahap Analisis Hasil Simulasi

Pada tahap ini dilakukan analisis terhadap hasil yang telah diperoleh dari simulasi.

E. Tahap Kesimpulan

Pada tahap ini dinyatakan kesimpulan dari model yang telah dianalisis kestabilan serta interpretasi hasil dari simulasi.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Model Populasi Mangsa - Pemangsa

Kami akan mengkaji model satu mangsa-dua pemangsa yang melibatkan interaksi antar pemangsa dan interaksi antar individu dalam populasi pemangsa. Berikut asumsi-asumsi yang digunakan dalam model.

1. Laju pertumbuhan populasi mangsa mengikuti laju pertumbuhan logistik.
2. Populasi pemangsa saling berkompetisi mendapatkan mangsa.
3. Menggunakan fungsi respon Holling tipe I dalam pemangsaan.
4. Terdapat kompetisi intraspesifik pada masing-masing populasi pemangsa.
5. Populasi pemangsa bernilai ekonomis sehingga dapat dipanen.

Dengan asumsi tersebut, diperoleh model

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - \alpha_1PH_1 - \alpha_2PH_2 \\ \frac{dH_1}{dt} &= e_1\alpha_1PH_1 - g_1H_1^2 - \beta_1H_1H_2 - d_1H_1 - q_1E_1H_1 \\ \frac{dH_2}{dt} &= e_2\alpha_2PH_2 - g_2H_2^2 - \beta_2H_1H_2 - d_2H_2 - q_2E_2H_2,\end{aligned}\quad (2)$$

dengan P , H_1 , H_2 adalah masing-masing populasi mangsa, pemangsa pertama dan pemangsa kedua. Parameter r merupakan laju pertumbuhan intrinsik populasi mangsa. Konstanta α_1 dan α_2 merupakan masing-masing laju penangkapan mangsa oleh pemangsa pertama dan pemangsa kedua. Konstanta e_1 dan e_2 adalah masing-masing menyatakan laju konversi pemangsaan terhadap perubahan populasi pemangsa pertama dan pemangsa kedua. Konstanta g_1 dan g_2 adalah masing-masing menyatakan koefisien kompetisi intraspesifik pemangsa pertama dan pemangsa kedua. Konstanta β_1 dan β_2 adalah masing-masing koefisien kompetisi pemangsa pertama terhadap pemangsa kedua dan sebaliknya. Konstanta d_1 dan d_2 masing-masing laju kematian pemangsa pertama dan pemangsa kedua. Konstanta q_1 dan q_2 adalah laju ketertangkapan pemangsa pertama dan pemangsa kedua. Konstanta E_1 dan E_2 adalah angka pemanenan dari pemangsa pertama dan pemangsa kedua.

B. Analisis Titik Keseimbangan Model Tanpa Pemanenan

Berikut ini diberikan model mangsa-pemangsa tanpa pemanenan

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - \alpha_1PH_1 - \alpha_2PH_2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\frac{dH_1}{dt} &= e_1\alpha_1PH_1 - g_1H_1^2 - \beta_1H_1H_2 \\ &\quad - d_1H_1 \\ \frac{dH_2}{dt} &= e_2\alpha_2PH_2 - g_2H_2^2 - \beta_2H_1H_2 \\ &\quad - d_2H_2.\end{aligned}$$

Titik keseimbangan yang mungkin pada sistem dinamika Eq. 3 adalah

$$\begin{aligned}T_1(0, 0, 0), T_2(K, 0, 0), T_3\left(0, 0, -\frac{d_2}{g_2}\right), \\ T_4\left(\frac{K(d_2\alpha_2+rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2}, 0, \frac{r(Ke_2\alpha_2-d_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2}\right), \\ T_5\left(0, -\frac{d_1}{g_1}, 0\right), \\ T_6\left(\frac{K(d_1\alpha_1+rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2+rg_1}, \frac{r(Ke_1\alpha_1-d_1)}{Ke_1\alpha_1^2+rg_1}, 0\right), \\ T_7\left(0, \frac{d_1g_2-d_2\beta_1}{\beta_1\beta_2-g_1g_2}, \frac{d_2g_1-d_1\beta_2}{\beta_1\beta_2-g_1g_2}\right), \\ T_8(P^*, H_1^*, H_2^*),\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}P^* &= \frac{K((d_1+E_1)s + (d_2+E_2)t + ru)}{Ke_1\alpha_1s + Ke_2\alpha_2t + ru} \\ H_1^* &= \frac{K\alpha_2v + Krw + rx}{Ke_1\alpha_1s + Ke_2\alpha_2t + ru} \\ H_2^* &= -\frac{K\alpha_1v + Kry + rz}{Ke_1\alpha_1s + Ke_2\alpha_2t + ru},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s &= \alpha_2\beta_2 - \alpha_1g_2, \quad t = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2g_1, \\ u &= \alpha_2\beta_2 - \alpha_1g_2, v = d_1e_2\alpha_2 - d_2e_1\alpha_1 \\ w &= e_2\alpha_2\beta_1 - e_1\alpha_1g_2, x = d_1g_2 - d_2\beta_1, \\ y &= e_2\alpha_2g_1 - e_1\alpha_1\beta_2, z = d_1\beta_2 - d_2g_1.\end{aligned}$$

Dengan mudah ditunjukkan bahwa $T_3\left(0, 0, -\frac{d_2}{g_2}\right)$

dan $T_5\left(0, -\frac{d_1}{g_1}, 0\right)$ merupakan titik keseimbangan yang tidak relevan dengan kondisi biologi sehingga tidak dapat dianalisis. Titik T_4 wujud jika $Ke_2\alpha_2 > d_2$. T_6 wujud jika $Ke_1\alpha_1 > d_1$. T_7 terwujud jika $\beta_1\beta_2 > g_1g_2$, $d_1g_2 > d_2\beta_1$ dan $d_1\beta_2 < d_2g_1$. T_8 terwujud jika $\alpha_2\beta_2 > \alpha_1g_2$, $\alpha_1\beta_1 > \alpha_2g_1$, $\alpha_2\beta_2 > \alpha_1g_2$, $d_1e_2\alpha_2 > d_2e_1\alpha_1$, $e_2\alpha_2\beta_1 > e_1\alpha_1g_2$, $d_1g_2 > d_2\beta_1$, $g_1 > d_1$, $d_2 > \beta_2$, dan $d_1\beta_2 > d_2g_1$.

C. Analisis Titik Keseimbangan Model dengan Pemanenan

Selanjutnya akan dianalisis kestabilan titik keseimbangan dari Eq.1. Titik keseimbangan pada sistem Eq.1 adalah $T_{1+}(0, 0, 0)$, $T_{2+}(K, 0, 0)$, $T_{3+}\left(0, 0, -\frac{E_2q_2+d_2}{g_2}\right)$, $T_{4+}\left(\frac{K(E_2\alpha_2q_2+d_2\alpha_2+rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2}, 0, \frac{r(Ke_2\alpha_2-E_2q_2-d_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2}\right)$, $T_{5+}\left(0, -\frac{E_1q_1+d_1}{g_1}, 0\right)$, $T_{6+}\left(\frac{K(E_1\alpha_1q_1+d_1\alpha_1+rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2+rg_1}, \frac{r(Ke_1\alpha_1-E_1q_1-d_1)}{Ke_1\alpha_1^2+rg_1}, 0\right)$, $T_{7+}\left(0, \frac{E_1g_2q_1-E_2\beta_1q_2+d_1g_2-d_2\beta_1}{\beta_1\beta_2-g_1g_2}, \frac{d_2g_1-d_1\beta_2}{\beta_1\beta_2-g_1g_2}\right)$, $T_{8+}(P^*, H_{1+}^*, H_{2+}^*)$, dengan

$$\begin{aligned}P^* &= \frac{K((d_1+E_1)s + (d_2+E_2)t + ru)}{Ke_1\alpha_1s + Ke_2\alpha_2t + ru} \\ H_{1+}^* &= \frac{K\alpha_2v + Krw + rx}{Ke_1\alpha_1s + Ke_2\alpha_2t + ru} \\ &\quad + \frac{(Ke_2\alpha_2^2 + rg_2)E_1 - (Ke_1\alpha_1\alpha_2 + r\beta_1)E_2}{Ke_1\alpha_1s + Ke_2\alpha_2t + ru} \\ H_{2+}^* &= -\frac{K\alpha_1v + Kry + rz}{Ke_1\alpha_1s + Ke_2\alpha_2t + ru} \\ &\quad + \frac{(Ke_1\alpha_1^2 + rg_1)E_2 - (Ke_2\alpha_1\alpha_2 + r\beta_2)E_1}{Ke_1\alpha_1s + Ke_2\alpha_2t + ru}\end{aligned}$$

diberikan $s = \alpha_2\beta_2 - \alpha_1g_2$, $t = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2g_1$, $u = \alpha_2\beta_2 - \alpha_1g_2$, $v = d_1e_2\alpha_2 - d_2e_1\alpha_1$, $w = e_2\alpha_2\beta_1 - e_1\alpha_1g_2$, $x = d_1g_2 - d_2\beta_1$, $y = e_2\alpha_2g_1 - e_1\alpha_1\beta_2$, $z = d_1\beta_2 - d_2g_1$ telah diketahui bahwa $T_{3+}\left(0, 0, -\frac{E_2q_2+d_2}{g_2}\right)$ dan

$T_{5+}\left(0, -\frac{E_1q_1+d_1}{g_1}, 0\right)$ merupakan titik keseimbangan yang tidak relevan dengan kondisi biologi sehingga tidak dapat dianalisis. T_{4+} terwujud jika $Ke_2\alpha_2 > E_2q_2 + d_2$. T_{6+} terwujud jika $Ke_1\alpha_1 > E_1q_1 + d_1$. T_{7+} terwujud jika $\beta_1\beta_2 > g_1g_2$, $E_1g_2q_1 + d_1g_2 > E_2\beta_1q_2 + d_2\beta_1$ dan $d_1\beta_2 < d_2g_1$. T_{8+} terwujud jika $\alpha_2\beta_2 > \alpha_1g_2$, $\alpha_1\beta_1 > \alpha_2g_1$, $\alpha_2\beta_2 > \alpha_1g_2$, $d_1e_2\alpha_2 > d_2e_1\alpha_1$, $e_2\alpha_2\beta_1 > e_1\alpha_1g_2$, $d_1g_2 > d_2\beta_1$, $g_1 > d_1$, $d_2 > \beta_2$, $d_1\beta_2 > d_2g_1$, dan $(Ke_1\alpha_1^2 + rg_1E_2 > Ke_2\alpha_1\alpha_2 + r\beta_2E_1)$.

D. Analisis kestabilan titik keseimbangan model (2)

Teorema 1 Titik keseimbangan $T_4\left(\frac{K(d_2\alpha_2+rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2}, 0, \frac{r(Ke_2\alpha_2-d_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2}\right)$ stabil lokal jika $\frac{e_1\alpha_1K(d_2\alpha_2+rg_2)}{\alpha_2K(e_2\alpha_2-d_2)} < \frac{\beta_1K(e_2\alpha_2-d_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2} + d_1$, $r < \frac{2r(d_2\alpha_2+rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2} + \frac{\alpha_2K(e_2\alpha_2-d_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2}$, $\frac{e_2\alpha_2K(d_2\alpha_2+rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2} < \frac{2g_2r(Ke_2\alpha_2-d_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2} + d_2$ dan $J_{11}^4J_{33}^4 > J_{13}^4J_{31}^4$.

Bukti. Diberikan matriks Jacobi $T_4\left(\frac{K(d_2\alpha_2+rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2}, 0, \frac{r(Ke_2\alpha_2-d_2)}{Ke_2\alpha_2^2+rg_2}\right)$ sebagai berikut.

$$J(T_4) = \begin{bmatrix} J_{11}^4 & J_{12}^4 & J_{13}^4 \\ J_{21}^4 & J_{22}^4 & J_{23}^4 \\ J_{31}^4 & J_{32}^4 & J_{33}^4 \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned}J_{11}^4 &= r - \frac{2r(d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} - \frac{\alpha_2K(e_2\alpha_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} \\ J_{12}^4 &= -\frac{\alpha_1K(d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2}, \\ J_{13}^4 &= -\frac{\alpha_2K(d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} \\ J_{21}^4 &= 0, \\ J_{22}^4 &= \frac{e_1\alpha_1K(d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} - \frac{\beta_1K(e_2\alpha_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} - d_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{23}^4 &= 0, \\ J_{31}^4 &= \frac{e_2 \alpha_2 r (K e_2 \alpha_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2}, \\ J_{32}^4 &= -\frac{\beta_2 r (K e_2 \alpha_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2}, \\ J_{33}^4 &= \frac{e_2 \alpha_2 K (d_2 \alpha_2 + r g_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} - \frac{2 g_2 r (K e_2 \alpha_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} - d_2. \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(T_4)$ diberikan sebagai berikut.

$$\det(J(T_4) - \lambda I) = 0. \quad (4)$$

Salah satu akar dari Eq.4 adalah $\frac{e_1 \alpha_1 K (d_2 \alpha_2 + r g_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} - \frac{\beta_1 K (e_2 \alpha_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} - d_1$. Nilai eigennya bernilai negatif jika $\frac{e_1 \alpha_1 K (d_2 \alpha_2 + r g_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} < \frac{\beta_1 K (e_2 \alpha_2 - d_2)}{K e_2 \alpha_2^2 + r g_2} + d_1$. Dua nilai eigen lainnya merupakan akar-akar persamaan kuadrat berikut ini.

$$\lambda^2 - \lambda(J_{11}^4 + J_{33}^4) + J_{11}^4 J_{33}^4 - J_{13}^4 J_{31}^4 = 0. \quad (5)$$

Jumlah akar-akar dari Eq.5 bernilai negatif jika $(J_{11}^4 + J_{33}^4) < 0, J_{11}^4 < 0, J_{33}^4 < 0$. Hasil kali akar-akarnya bernilai positif jika $J_{11}^4 J_{33}^4 > J_{13}^4 J_{31}^4$.

Teorema 2 Titik keseimbangan $T_6 \left(\frac{K(d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, \frac{r(K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, 0 \right)$ stabil jika $\frac{e_2 \alpha_2 K (d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} < \frac{\beta_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} + d_2, r < \frac{2r(d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} + \frac{\alpha_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, \frac{e_1 \alpha_1 K (d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} < \frac{2g_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} + d_1$ dan $J_{11}^6 J_{22}^6 > J_{12}^6 J_{21}^6$.

Bukti. Diberikan matriks Jacobi

$$T_6 \left(\frac{K(d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, \frac{r(K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, 0 \right) \text{ sebagai berikut.}$$

$$J(T_6) = \begin{bmatrix} J_{11}^6 & J_{12}^6 & J_{13}^6 \\ J_{21}^6 & J_{22}^6 & J_{23}^6 \\ J_{31}^6 & J_{32}^6 & J_{33}^6 \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} J_{11}^6 &= r - \frac{2r(d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} - \frac{\alpha_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} \\ J_{12}^6 &= -\frac{\alpha_1 K (d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, \\ J_{13}^6 &= -\frac{\alpha_2 K (d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} \\ J_{21}^6 &= \frac{e_1 \alpha_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} \\ J_{22}^6 &= \frac{e_1 \alpha_1 K (d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} - \frac{2g_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} - d_1 \\ J_{23}^6 &= -\frac{\beta_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1}, J_{31}^6 = 0, J_{32}^6 = 0 \\ J_{33}^6 &= \frac{e_2 \alpha_2 K (d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} - \frac{\beta_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} - d_2. \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(T_6)$ diberikan sebagai berikut.

$$\det(J(T_6) - \lambda I) = 0. \quad (6)$$

Salah satu akar dari Eq.6 adalah $\frac{e_2 \alpha_2 K (d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} - \frac{\beta_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} - d_2$. Nilai eigennya akan bernilai negatif jika $\frac{e_2 \alpha_2 K (d_1 \alpha_1 + r g_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} < \frac{\beta_1 r (K e_1 \alpha_1 - d_1)}{K e_1 \alpha_1^2 + r g_1} + d_2$. Dua nilai eigen lainnya merupakan akar-akar persamaan kuadrat berikut ini

$$\lambda^2 - \lambda(J_{11}^6 + J_{22}^6) + J_{11}^6 J_{22}^6 - J_{12}^6 J_{21}^6 = 0. \quad (7)$$

Jumlah akar-akar dari Eq.7 bernilai negatif jika $(J_{11}^6 + J_{22}^6) < 0, J_{11}^6 < 0, J_{22}^6 < 0$. Hasil kali akar-akarnya bernilai positif jika $J_{11}^6 J_{22}^6 > J_{12}^6 J_{21}^6$.

Teorema 3 Titik keseimbangan $T_8(P^*, H_1^*, H_2^*)$ stabil jika $r < \frac{2rP^*}{K} + \alpha_1 H_1^* + \alpha_2 H_2^*, e_1 \alpha_1 P^* < 2g_1 H_1^* + \beta_1 H_2^* + d_1, e_2 \alpha_2 P^* < \beta_2 H_1^* + 2g_2 H_2^* + d_2, J_{11} J_{22} + J_{11} J_{33} + J_{22} J_{33} > J_{12} J_{21} + J_{13} J_{31} + J_{23} J_{32}$ dan $-J_{11} + J_{22} + J_{33}/11/22 + J_{11}/33 + J_{22}/33 - J_{12}/21 - J_{13}/31 - J_{23}/32 > J_{11}/23/32 + J_{12}/21/33 + J_{13}/31/22 - J_{11}/22/33 - J_{12}/23/31 - J_{13}/32/21$

Bukti. Diberikan matriks Jacobi dari $T_8(P^*, H_1^*, H_2^*)$ sebagai berikut.

$$J(T_8) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} J_{11} &= r - \frac{2rP^*}{K} - \alpha_1 H_1^* - \alpha_2 H_2^*, J_{12} = -\alpha_1 P^*, \\ J_{13} &= -\alpha_2 P^*, J_{21} = e_1 \alpha_1 H_1^*, \\ J_{22} &= e_1 \alpha_1 P^* - 2g_1 H_1^* - \beta_1 H_2^* - d_1, \\ J_{23} &= -\beta_1 H_1^*, J_{31} = e_2 \alpha_2 H_2^*, \\ J_{32} &= -\beta_2 H_2^*, \\ J_{33} &= e_2 \alpha_2 P^* - \beta_2 H_1^* - 2g_2 H_2^* - d_2 \\ P^* &= \frac{K(d_1 s + d_2 t + ru)}{K e_1 \alpha_1 s + K e_2 \alpha_2 t + ru} \\ H_1^* &= \frac{K \alpha_2 v + K r w + r x}{K e_1 \alpha_1 s + K e_2 \alpha_2 t + ru} \\ H_2^* &= -\frac{K \alpha_1 v + K r y + r z}{K e_1 \alpha_1 s + K e_2 \alpha_2 t + ru} \\ s &= \alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 g_2, t = \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 g_1, u \\ &= \alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 g_2, \\ v &= d_1 e_2 \alpha_2 - d_2 e_1 \alpha_1, w = e_2 \alpha_2 \beta_1 - e_1 \alpha_1 g_2, \\ x &= d_1 g_2 - d_2 \beta_1, y = e_2 \alpha_2 g_1 - e_1 \alpha_1 \beta_2, \\ z &= d_1 \beta_2 - d_2 g_1. \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(T_8)$ adalah

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= -(J_{11} + J_{22} + J_{33}) \\ A_2 &= J_{11}J_{22} + J_{11}J_{33} + J_{22}J_{33} - J_{12}J_{21} - J_{13}J_{31} \\ &\quad - J_{23}J_{32} \\ A_3 &= J_{11}J_{23}J_{32} + J_{12}J_{21}J_{33} + J_{13}J_{31}J_{22} - J_{11}J_{22}J_{33} \\ &\quad - J_{12}J_{23}J_{31} - J_{13}J_{32}J_{21}. \end{aligned}$$

Nilai eigen dari Eq.8 akan bernilai negatif, jika $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $A_3 > 0$, dan $A_1A_2 > A_3$.

E. Analisis kestabilan titik keseimbangan model (I)

Teorema 4 Titik keseimbangan $T_{4+} \left(\frac{K(E_2\alpha_2q_2 + d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2}, 0, \frac{r(Ke_2\alpha_2 - E_2q_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} \right)$ stabil jika $\frac{e_1\alpha_1K(E_2\alpha_2q_2 + d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} < \frac{\beta_1K(Ke_2\alpha_2 - E_2q_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} + \frac{E_1q_1 + d_1, r < 2r(E_2\alpha_2q_2 + d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} + \frac{\alpha_2r(Ke_2\alpha_2 - E_2q_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2}, \frac{e_2\alpha_2K(E_2\alpha_2q_2 + d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} < \frac{2g_2r(Ke_2\alpha_2 - E_2q_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} + d_2$ dan $J_{11}^{4+}J_{33}^{4+} > J_{13}^{4+}J_{31}^{4+}$.

Bukti. Diberikan matriks Jacobi $T_{4+} \left(\frac{K(E_2\alpha_2q_2 + d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2}, 0, \frac{r(Ke_2\alpha_2 - E_2q_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} \right)$ sebagai berikut.

$$J(T_{4+}) = \begin{bmatrix} J_{11}^{4+} & J_{12}^{4+} & J_{13}^{4+} \\ J_{21}^{4+} & J_{22}^{4+} & J_{23}^{4+} \\ J_{31}^{4+} & J_{32}^{4+} & J_{33}^{4+} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} J_{11}^{4+} &= r - \frac{2r(E_2\alpha_2q_2 + d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} - \frac{\alpha_2r(Ke_2\alpha_2 - E_2q_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} \\ J_{12}^{4+} &= -\frac{\alpha_1K(E_2\alpha_2q_2 + d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} \\ J_{13}^{4+} &= -\frac{\alpha_2K(E_2\alpha_2q_2 + d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} \\ J_{21}^{4+} &= 0, \\ J_{22}^{4+} &= \frac{e_1\alpha_1K(E_2\alpha_2q_2 + d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} - \frac{\beta_1K(Ke_2\alpha_2 - E_2q_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} - E_1q_1 - d_1 \\ J_{23}^{4+} &= 0, J_{31}^{4+} = \frac{e_2\alpha_2r(Ke_2\alpha_2 - E_2q_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2}, \\ J_{32}^{4+} &= -\frac{\beta_2r(Ke_2\alpha_2 - E_2q_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} \\ J_{33}^{4+} &= \frac{e_2\alpha_2K(E_2\alpha_2q_2 + d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} - \frac{2g_2r(Ke_2\alpha_2 - E_2q_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} - d_2. \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(T_{4+})$ diberikan sebagai berikut

$$\det(J(T_{4+}) - \lambda I) = 0. \quad (9)$$

Salah satu akar dari Eq.9 adalah $\frac{e_1\alpha_1K(E_2\alpha_2q_2 + d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} - \frac{\beta_1K(Ke_2\alpha_2 - E_2q_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} - E_1q_1 - d_1$. Nilai eigennya akan bernilai negatif jika $\frac{e_1\alpha_1K(E_2\alpha_2q_2 + d_2\alpha_2 + rg_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} < \frac{\beta_1K(Ke_2\alpha_2 - E_2q_2 - d_2)}{Ke_2\alpha_2^2 + rg_2} + E_1q_1 + d_1$

Dua nilai eigen lainnya merupakan akar-akar persamaan kuadrat berikut ini.

$$\lambda^2 - \lambda(J_{11}^{4+} + J_{33}^{4+}) + J_{11}^{4+}J_{33}^{4+} - J_{13}^{4+}J_{31}^{4+} = 0. \quad (10)$$

Jumlah akar-akar dari Eq.10 bernilai negatif jika $(J_{11}^{4+} + J_{33}^{4+}) < 0$, $J_{11}^{4+} < 0$, $J_{33}^{4+} < 0$. Hasil kali akar-akarnya bernilai positif jika $J_{11}^{4+}J_{33}^{4+} > J_{13}^{4+}J_{31}^{4+}$.

Teorema 5 Titik keseimbangan $T_{6+} \left(\frac{K(E_1\alpha_1q_1 + d_1\alpha_1 + rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1}, \frac{r(Ke_1\alpha_1 - E_1q_1 - d_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1}, 0 \right)$ stabil jika $\frac{e_2\alpha_2K(E_1\alpha_1q_1 + d_1\alpha_1 + rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} < \frac{\beta_2r(Ke_1\alpha_1 - E_1q_1 - d_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} + \frac{E_2q_2 + d_2, r < 2r(E_1\alpha_1q_1 + d_1\alpha_1 + rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} + \frac{\alpha_1r(Ke_1\alpha_1 - E_1q_1 - d_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1}, \frac{e_1\alpha_1K(E_1\alpha_1q_1 + d_1\alpha_1 + rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} < \frac{2g_1r(Ke_1\alpha_1 - E_1q_1 - d_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} + E_1q_1 + d_1$ dan $J_{11}^{6+}J_{22}^{6+} > J_{12}^{6+}J_{21}^{6+}$.

Bukti. Diberikan matriks Jacobi $T_{6+} \left(\frac{K(E_1\alpha_1q_1 + d_1\alpha_1 + rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1}, \frac{r(Ke_1\alpha_1 - E_1q_1 - d_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1}, 0 \right)$ sebagai berikut.

$$J(T_{6+}) = \begin{bmatrix} J_{11}^{6+} & J_{12}^{6+} & J_{13}^{6+} \\ J_{21}^{6+} & J_{22}^{6+} & J_{23}^{6+} \\ J_{31}^{6+} & J_{32}^{6+} & J_{33}^{6+} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} J_{11}^{6+} &= r - \frac{2r(E_1\alpha_1q_1 + d_1\alpha_1 + rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} - \frac{\alpha_1r(Ke_1\alpha_1 - E_1q_1 - d_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} \\ J_{12}^{6+} &= -\frac{\alpha_1K(E_1\alpha_1q_1 + d_1\alpha_1 + rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1}, \\ J_{13}^{6+} &= -\frac{\alpha_2K(E_1\alpha_1q_1 + d_1\alpha_1 + rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} \\ J_{21}^{6+} &= \frac{e_1\alpha_1r(Ke_1\alpha_1 - E_1q_1 - d_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} \\ J_{22}^{6+} &= \frac{e_1\alpha_1K(E_1\alpha_1q_1 + d_1\alpha_1 + rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} - \frac{2g_1r(Ke_1\alpha_1 - E_1q_1 - d_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} - E_1q_1 - d_1 \\ J_{23}^{6+} &= -\frac{\beta_1r(Ke_1\alpha_1 - E_1q_1 - d_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1}, \\ J_{31}^{6+} &= 0, J_{32}^{6+} = 0 \\ J_{33}^{6+} &= \frac{e_2\alpha_2K(E_1\alpha_1q_1 + d_1\alpha_1 + rg_1)}{Ke_1\alpha_1^2 + rg_1} \end{aligned}$$

$$-\frac{\beta_2 r(Ke_1 \alpha_1 - E_1 q_1 - d_1)}{Ke_1 \alpha_1^2 + r g_1} - E_2 q_2 - d_2$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(T_{6+})$ diberikan sebagai berikut.

$$\det(J(T_{6+}) - \lambda I) = 0 \quad (11)$$

Salah satu akar dari Eq.11 adalah $\frac{e_2 \alpha_2 K(E_1 \alpha_1 q_1 + d_1 \alpha_1 + r g_1)}{Ke_1 \alpha_1^2 + r g_1} - \frac{\beta_2 r(Ke_1 \alpha_1 - E_1 q_1 - d_1)}{Ke_1 \alpha_1^2 + r g_1} - E_2 q_2 - d_2$. Nilai eigennya akan bernilai negatif jika

$$\frac{e_2 \alpha_2 K(E_1 \alpha_1 q_1 + d_1 \alpha_1 + r g_1)}{Ke_1 \alpha_1^2 + r g_1} <$$

$$\frac{\beta_2 r(Ke_1 \alpha_1 - E_1 q_1 - d_1)}{Ke_1 \alpha_1^2 + r g_1} + E_2 q_2 + d_2.$$

Dua nilai eigen lainnya merupakan akar-akar persamaan kuadrat berikut ini.

$$\lambda^2 - \lambda(J_{11}^{6+} + J_{22}^{6+}) + J_{11}^{6+} J_{22}^{6+} - J_{12}^{6+} J_{21}^{6+} = 0. \quad (12)$$

Jumlah akar-akar dari Eq.12 bernilai negatif jika $(J_{11}^{6+} + J_{22}^{6+}) < 0, J_{11}^{6+} < 0, J_{22}^{6+} < 0$. Hasil kali akar-akarnya bernilai positif jika $J_{11}^{6+} J_{22}^{6+} > J_{12}^{6+} J_{21}^{6+}$.

Teorema 6 Titik keseimbangan $T_{8+}(P_+^*, H_{1+}^*, H_{2+}^*)$ stabil jika $J_{11} < 0, J_{22} < 0, J_{33} < 0, J_{11} J_{22} + J_{11} J_{33} + J_{22} J_{33} > J_{12} J_{21} + J_{13} J_{31} + J_{23} J_{32}$ dan $-(J_{11} + J_{22} + J_{33})(J_{11} J_{22} + J_{11} J_{33} + J_{22} J_{33} - J_{12} J_{21} - J_{13} J_{31} - J_{23} J_{32}) > J_{11} J_{23} J_{32} + J_{12} J_{21} J_{33} + J_{13} J_{31} J_{22} - J_{11} J_{22} J_{33} - J_{12} J_{23} J_{31} - J_{13} J_{32} J_{21}$.

Bukti. Diberikan matriks Jacobi dari $T_{8+}(P_+^*, H_{1+}^*, H_{2+}^*)$ sebagai berikut.

$$J(T_{8+}) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

dengan

$$J_{11} = r - \frac{2rP^*}{K} - \alpha_1 H_1^* - \alpha_2 H_2^*, J_{12} = -\alpha_1 P^*,$$

$$J_{13} = -\alpha_2 P^*, J_{21} = e_1 \alpha_1 H_1^*,$$

$$J_{22} = e_1 \alpha_1 P^* - 2g_1 H_1^* - \beta_1 H_2^* - d_1,$$

$$J_{23} = -\beta_1 H_1^*, J_{31} = e_2 \alpha_2 H_2^*,$$

$$J_{32} = -\beta_2 H_2^*,$$

$$J_{33} = e_2 \alpha_2 P^* - \beta_2 H_1^* - 2g_2 H_2^* - d_2$$

$$P_+^* = \frac{K((d_1 + E_1)s + (d_2 + E_2)t + ru)}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru}$$

$$H_{1+}^* = \frac{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru + (Ke_2 \alpha_2^2 + r g_2)E_1 - (Ke_1 \alpha_1 \alpha_2 + r \beta_1)E_2}$$

$$+ \frac{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru}{K \alpha_1 v + K r y + r z}$$

$$H_{2+}^* = -\frac{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru}{(Ke_1 \alpha_1^2 + r g_1)E_2 - (Ke_2 \alpha_1 \alpha_2 + r \beta_2)E_1}$$

$$+ \frac{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru}{K \alpha_1 v + K r y + r z}$$

$$s = \alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 g_2, t = \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 g_1,$$

$$u = \alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 g_2,$$

$$v = d_1 e_2 \alpha_2 - d_2 e_1 \alpha_1, w = e_2 \alpha_2 \beta_1 - e_1 \alpha_1 g_2,$$

$$x = d_1 g_2 - d_2 \beta_1, y = e_2 \alpha_2 g_1 - e_1 \alpha_1 \beta_2,$$

$$z = d_1 \beta_2 - d_2 g_1.$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(T_{8+})$ adalah

$$\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0 \quad (13)$$

$$A_1 = -(J_{11} + J_{22} + J_{33})$$

$$A_2 = J_{11} J_{22} + J_{11} J_{33} + J_{22} J_{33}$$

$$- J_{12} J_{21} - J_{13} J_{31} - J_{23} J_{32}$$

$$A_3 = J_{11} J_{23} J_{32} + J_{12} J_{21} J_{33} + J_{13} J_{31} J_{22}$$

$$- J_{11} J_{22} J_{33} - J_{12} J_{23} J_{31} - J_{13} J_{32} J_{21}.$$

Nilai eigen dari Eq.13 bernilai negatif, yakni $A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0$, dan $A_1 A_2 > A_3$.

F. Pemanenan Optimal

Teorema 7 Fungsi pemanenan dengan titik kritis $TE_*(E_1^*, E_2^*)$ optimal jika $B_3 p_1 + B_6 p_2 >$

$$2\sqrt{B_2 B_5 p_1 p_2},$$

$$B_3 B_4 p_1 p_2 + B_4 B_6 p_2^2 + B_3 c_2 p_1 + 2B_5 c_1 p_2 +$$

$$B_6 c_2 p_2 < 2B_1 B_5 p_1 p_2$$

$$B_1 B_3 p_1^2 + B_1 B_6 p_1 p_2 >$$

$$2B_2 B_4 p_1 p_2 + 2B_2 c_2 p_1 + B_3 c_1 p_1 + B_6 c_1 p_2.$$

Bukti. Fungsi keuntungan yang digunakan adalah

$$\pi = p_1 H_{1+}^* E_1 + p_2 H_{2+}^* E_2 - c_1 E_1 - c_2 E_2. \quad (14)$$

Untuk memaksimalkan keuntungan maka ditentukan titik kritis dengan syarat

$$\frac{d\pi}{dE_1} = 0, \frac{d\pi}{dE_2} = 0, \quad (15)$$

sehingga diperoleh titik kritis $TE_*(E_1^*, E_2^*)$ dengan

$$E_1^* = -\frac{B_3 B_4 p_1 p_2 + B_4 B_6 p_2^2 + B_3 c_2 p_1}{B_3^2 p_1^2 + 2B_3 B_6 p_1 p_2 + B_6^2 p_2^2 - 4B_2 B_5 p_1 p_2}$$

$$- \frac{2B_5 c_1 p_2 + B_6 c_2 p_2 - 2B_1 B_5 p_1 p_2}{B_3^2 p_1^2 + 2B_3 B_6 p_1 p_2 + B_6^2 p_2^2 - 4B_2 B_5 p_1 p_2}$$

$$E_2^* = \frac{B_1 B_3 p_1^2 + B_1 B_6 p_1 p_2 - 2B_2 B_4 p_1 p_2}{B_3^2 p_1^2 + 2B_3 B_6 p_1 p_2 + B_6^2 p_2^2 - 4B_2 B_5 p_1 p_2}$$

$$- \frac{2B_2 c_2 p_1 + B_3 c_1 p_1 + B_6 c_1 p_2}{B_3^2 p_1^2 + 2B_3 B_6 p_1 p_2 + B_6^2 p_2^2 - 4B_2 B_5 p_1 p_2}$$

$$B_1 = \frac{K \alpha_2 v + K r w + r x}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru}$$

$$B_2 = \frac{(Ke_2 \alpha_2^2 + r g_2)}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru}$$

$$B_3 = \frac{(Ke_1 \alpha_1 \alpha_2 + r \beta_1)}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru}$$

$$B_4 = \frac{K \alpha_1 v + K r y + r z}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru}$$

$$B_5 = \frac{(Ke_1 \alpha_1^2 + r g_1)}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru}$$

$$B_6 = \frac{(Ke_2 \alpha_1 \alpha_2 + r \beta_2)}{Ke_1 \alpha_1 s + Ke_2 \alpha_2 t + ru}.$$

$$\begin{aligned}
 E_1^* &> 0 \\
 B_3 p_1 + B_6 p_2 &> 2\sqrt{B_2 B_5 p_1 p_2}, \\
 B_3 B_4 p_1 p_2 + B_4 B_6 p_2^2 + B_3 c_2 p_1 + 2B_5 c_1 p_2 \\
 + B_6 c_2 p_2 &< 2B_1 B_5 p_1 p_2 \\
 E_2^* &> 0 \\
 B_1 B_3 p_1^2 + B_1 B_6 p_1 p_2 &> \\
 2B_2 B_4 p_1 p_2 + 2B_2 c_2 p_1 + B_3 c_1 p_1 + B_6 c_1 p_2
 \end{aligned}$$

G. Simulasi numerik model tanpa pemanenan

Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi yaitu $r = 1.5, K = 10000, \alpha_1 = 0.000021, \alpha_2 = 0.000022, e_1 = 0.5, e_2 = 0.5, d_1 = 0.00055, d_2 = 0.00065, \beta_1 = 0.0000008, \beta_2 = 0.000001, g_1 = 0.000022, g_2 = 0.000022, q_1 = q_2 = 1$. Titik keseimbangan yang diperoleh yaitu $T_8 = (8721.544892, 4369.476033, 4545.875889)$

Matriks Jacobi dari T_8 adalah

$$J(T_8) = \begin{bmatrix} -1.308231735 & -0.1831524427 & -0.1918739876 \\ 0.04587949835 & -0.08738952063 & -0.003495580826 \\ 0.05000463478 & -0.004545875889 & -0.09091751779 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik yang dibentuk dari $J(T_8)$ adalah

$$\lambda^3 + 1.486538773\lambda^2 + 0.2591938049\lambda + 0.01190383372$$

Nilai eigen yang diperoleh adalah

$$(-1.29323327963695, -0.108359422651380, -0.0849460711316692)$$

H. Simulasi numerik model dengan pemanenan

Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi yaitu $r = 1.5, K = 10000, \alpha_1 = 0.000021, \alpha_2 = 0.000022, e_1 = 0.5, e_2 = 0.5, d_1 = 0.00055, d_2 = 0.00065, \beta_1 = 0.0000008, \beta_2 = 0.000001, g_1 = 0.000022, g_2 = 0.000022, q_1 = q_2 = 1, p_1 = p_2 = 10, c_1 = c_2 = 5$. Titik keseimbangan yang diperoleh dari simulasi dari Eq.2 tanpa nilai E_1 dan E_2 yaitu

$$\begin{aligned}
 T(E_1, E_2) &= (8721.544892 + 6158.843441E_2 \\
 &+ 5792.107017E_1, 4369.476033 \\
 &+ 5108.114480E_2 \\
 &- 47180.93203E_1, 4545.875889 \\
 &+ 5544.705461E_1 - 46868.04183E_2)
 \end{aligned}$$

$$\pi(E_1, E_2) = p_1 H_{1+}^* E_1 + p_2 H_{2+}^* E_2 - c_1 E_1 - c_2 E_2$$

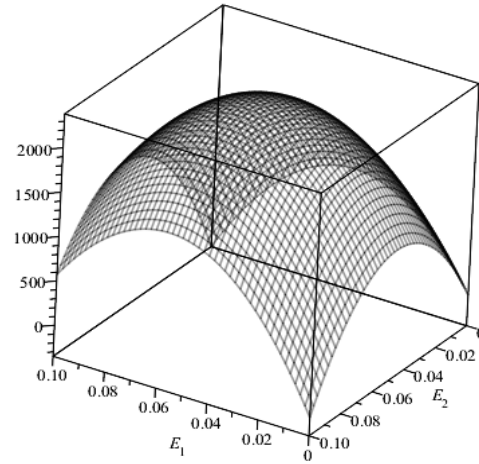
$$\begin{aligned}
 \pi(E_1, E_2) &= 10E_1(4369.47603 \\
 &+ 5108.114480E_2 - 47180.93203E_1) \\
 &+ 10E_2(4545.875889 + 5544.705461E_1 \\
 &- 46868.04183E_2) - 5E_1 - 5E_2
 \end{aligned}$$

Titik kritis dari fungsi keuntungan adalah sebagai berikut

$$TE_*(0.05244746121, 0.05445170152).$$

Keuntungan maksimal yang diperoleh yaitu

$$\pi = 2383.225761$$



Gambar 1. Kurva fungsi pemanenan

Nilai parameter pemanenan yang digunakan yaitu $E_1 = 0.05244746121, E_2 = 0.05445170152$.

Titik keseimbangan yang diperoleh dari simulasi dari Eq.2 yaitu

$$T_{8+} = (9360.685705, 2173.101455, 2284.636989)$$

Matriks Jacobi dari T_{8+} adalah

$$J(T_{8+}) = \begin{bmatrix} -1.404102857 & -0.1965743998 & -0.2059350855 \\ 0.02281756528 & -0.04346202910 & -0.001738481164 \\ 0.02513100688 & -0.002284636989 & -0.04569273974 \end{bmatrix}$$

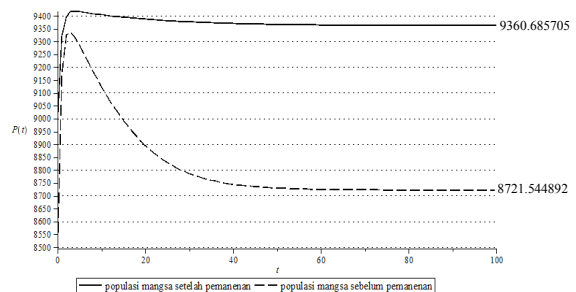
Persamaan karakteristik yang dibentuk dari $J(T_{8+})$ adalah

$$\lambda^3 + 1.493257626\lambda^2 + 0.136825098\lambda + 0.003193385615$$

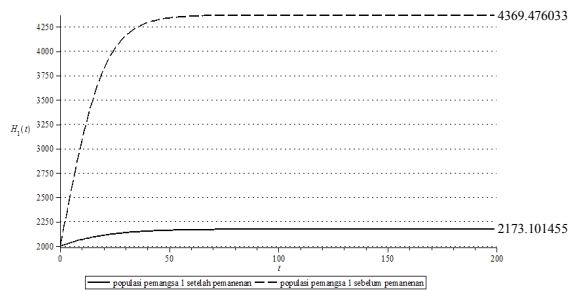
Nilai eigen yang diperoleh adalah

$$(-1.39694831795502, -0.0538903378614323, -0.0424189700235430)$$

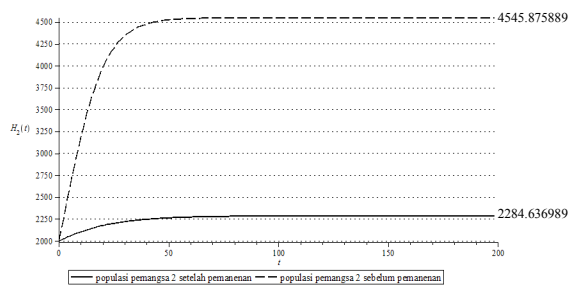
Dengan menggunakan nilai awal $P(0) = 9000, H_1(0) = 2000, H_2(0) = 2000$ maka diperoleh hasil simulasi dari Eq.2 dan Eq. 3 adalah sebagai berikut sebagai berikut.



Gambar 2. Plot trayektori populasi mangsa



Gambar 3. Plot trayektori populasi pemangsa pertama



Gambar 4. Plot trayektori populasi pemangsa kedua

V. KESIMPULAN

Model mangsa-pemangsa dengan dan tanpa pemanenan memiliki dinamika populasi yang sangat berbeda. Selain memberi keuntungan yang maksimal ($\pi = 2383.225761$) setelah pemanenan, kebijakan dengan memanen populasi pemangsa memberi dampak pada peningkatan kepadatan populasi mangsa. Walaupun kepadatan populasi pemangsa berkurang setelah pemanenan, namun tidak mengganggu kestabilan sistem.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis menyampaikan terima kasih kepada Direktorat Riset dan Pengabdian Masyarakat, Direktorat Jenderal Penguatan Riset dan Pengembangan, Kemenristekdikti atas bantuan hibah Kompetisi Penelitian Tim Pascasarjana melalui LP2M Unhas dengan nomor kontrak: 2569/UN4.21/LK.23/2017.

DAFTAR PUSTAKA

- Agarwal, M. dan Pathak, R. 2012, "Persistence and Optimal Harvesting of Prey-Predator Model with Holling Type III Functional Response", International Journal of Engineering, Science and Technology, Vol. 4, No. 3, 2012, p. 78-96.
- Alebraheem, J. dan Hasan, Y.A., 2012, "Persistence of Predators in a Two Predators-One Prey Model with Non-Periodic Solution", Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, No. 19, p. 943 - 956.
- Das, K. 2011, "A Mathematical Study of a Predator-Prey Dynamics with Disease in Predator", International Scholarly Research Network (ISRN), Applied Mathematics, Volume 2011, Article ID 807486, p. 1-6.
- Farajzadeh, A., Doust, M.H.R., Haghighifar, F. dan Baleanu, D. 2011, "The Stability of Gauss Model Having One Prey and Two Predators", Hindawi Publishing, Corporation Abstract and Applied Analysis, Volume 2012, Article ID 219640, p.1-9.
- Gupta, R.P. dan Chandra, P. 2017, "Dynamical Properties of a Prey-Predator-Scavenger Model with Quadratic Harvesting", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (CNSNS), Volume 49, August 2017, p. 202-214.
- Kar, T.K. dan Matsuda, H. 2007, "Global Dynamics and Controllability of a Harvested Prey-Predator System with Holling Type III Functional Response", Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, Volume 1, p. 59-67.
- Kar, T. K. 2010, "A Dynamic Reaction Model of a Prey-Predator System with Stage-Structure for Predator", Modern Applied Science, Vol. 4, No. 5, May 2010, p. 183-195.
- Mukhopadhyay, B. dan Bhattacharyya, R. 2015, "Effects of Harvesting and Predator Interference in a Model of Two Predators Competing for a Single Prey", Applied Mathematical Modelling, Volume 40, Issue 4, 15 February 2016, p. 3264-327.
- Ndam, J. N., Chollom, J. P. dan Kassem, T. G. 2012, "A Mathematical Model of Three-Species Interactions in an Aquatic Habitat" International Scholarly Research Network (ISRN), Applied Mathematics, Volume 2012, Article ID 391547, p. 1-11.
- Toaha, S., Kusuma, J., Khaeruddin dan Bahri, M., 2014, "Stability Analysis and Optimal Harvesting Policy of Prey-Predator Model with Stage Structure for Predator", Applied Mathematical Sciences, Vol. 8, No. 159, p. 7923-7934.
- Upadhyay, R. K., dan Raw, S. N. 2011, "Complex Dynamics of a Three Species Food-Chain Model with Holling Type IV Functional Response", Nonlinear Analysis: Modelling and Control, Volume 16, No.3, p. 353-374.